

**«КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
**ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ**  
**Кафедра математики и экономической**  
**информатики**

Методическая разработка

по дисциплине

**«Математический анализ»**

для организации индивидуальной работы студентов,  
обучающихся по направлению 080100.62 «Экономика»

(квалификация «Бакалавр»)

**Казань 2012**

**Составители:**

к.ф.-м.н, профессор **Марданов Р.Ш.**,

к.ф.-м.н., доцент **Хасанова А.Ю.**,

**Рецензент:**

асс. **Махмутова Д. И.**

к.ф.-м.н., доцент **Султанов Р.А.**

Обсуждена на заседании кафедры математики и экономической информатики, протокол №10 от 02.06.11

Утверждена Учебно-методической комиссией института, протокол № 2 от 16.04.12

## **Введение**

В соответствии с программой дисциплины «Математический анализ» студенты должны выполнить 12 индивидуальных работ. Индивидуальные работы включают следующие темы:

- Прямая линия на плоскости;
- Предел функции;
- Непрерывность функции;
- Производная функции;
- Применение дифференциального исчисления для исследования функций;
- Применение дифференциального исчисления в экономических исследованиях;
- Экстремумы функции многих переменных;
- Методы интегрирования;
- Определенный интеграл;
- Числовые ряды;
- Дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, допускающие понижения порядка;
- Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

По каждой теме приводятся 30 вариантов заданий. В рамках индивидуальных занятий по математике студенты должны выполнить по одному варианту задания соответствующей темы. На выполнение одного варианта индивидуальных заданий по каждой теме отводится 2 часа. Контроль знаний осуществляется путем проверки письменной работы и оценки по балльно-рейтинговой системе.

**Основная часть****Индивидуальная работа №1.****Тема. Прямая линия на плоскости**

Задание:

Методами аналитической геометрии решить следующую задачу.

**Задача.** Между пунктами  $A$  и  $B$  по прямой линии проходит шоссе. Завод  $C$  соединен с этим шоссе кратчайшей дорогой,  $D$  – точка пересечения дороги с шоссе. На дороге  $CD$  в п.  $M$  расположена автозаправочная станция, причем  $\frac{CM}{MD} = \frac{m}{n}$ . Найти: а) расстояние от п.  $C$  до шоссе  $AB$ ; б) координаты точки  $D$ ; в) расстояние от п.  $B$  до п.  $M$ ; г) величину угла  $CAB$ .

Варианты заданий:

1.  $A(3; 5)$ ,  $B(6; 11)$ ,  $C(9; 6)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ .
2.  $A(1; 3)$ ,  $B(5; 1)$ ,  $C(4; 6)$ ,  $m = 3$ ,  $n = 2$ .
3.  $A(1; 1)$ ,  $B(7; 3)$ ,  $C(3; 4)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ .
4.  $A(2; 4)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(4; 6)$ ,  $m = 2$ ,  $n = 3$ .
5.  $A(3; 7)$ ,  $B(9; 1)$ ,  $C(5; 6)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 3$ .
6.  $A(2; 4)$ ,  $B(4; 8)$ ,  $C(3; 1)$ ,  $m = 3$ ,  $n = 2$ .
7.  $A(3; 1)$ ,  $B(11; 7)$ ,  $C(5; 8)$ ,  $m = 3$ ,  $n = 1$ .
8.  $A(4; 2)$ ,  $B(12; 6)$ ,  $C(7; 9)$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$ .
9.  $A(2; 8)$ ,  $B(10; 4)$ ,  $C(4; 1)$ ,  $m = 3$ ,  $n = 4$ .
10.  $A(3; 2)$ ,  $B(6; 8)$ ,  $C(8; 3)$ ,  $m = 3$ ,  $n = 2$ .
11.  $A(1; 7)$ ,  $B(11; 2)$ ,  $C(7; 8)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ .
12.  $A(8; 4)$ ,  $B(2; 12)$ ,  $C(3; 5)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ .
13.  $A(11; 9)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(5; 8)$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$ .
14.  $A(14; 3)$ ,  $B(4; 8)$ ,  $C(8; 1)$ ,  $m = 2$ ,  $n = 3$ .
15.  $A(2; 2)$ ,  $B(10; 6)$ ,  $C(3; 8)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 3$ .
16.  $A(9; 1)$ ,  $B(2; 8)$ ,  $C(2; 2)$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$ .
17.  $A(14; 9)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(4; 10)$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ .
18.  $A(3; 4)$ ,  $B(10; 6)$ ,  $C(8; 2)$ ,  $m = 3$ ,  $n = 2$ .

19.  $A(4; 2), B(12; 6), C(7; 10), m = 1, n = 1.$
20.  $A(2; 7), B(7; 12), C(8; 5), m = 2, n = 3.$
21.  $A(2; 9), B(10; 5), C(3; 2), m = 1, n = 3.$
22.  $A(3; 6), B(11; 14), C(10; 3), m = 3, n = 1.$
23.  $A(1; 9), B(10; 3), C(2; 1), m = 3, n = 4.$
24.  $A(10; 8), B(4; 3), C(6; 11), m = 2, n = 4.$
25.  $A(5; 10), B(12; 2), C(1; 2), m = 3, n = 2.$
26.  $A(2; 3), B(8; 7), C(10; 1), m = 2, n = 3.$
27.  $A(2; 6), B(14; 2), C(11; 9), m = 1, n = 4.$
28.  $A(5; 11), B(14; 5), C(7; 1), m = 2, n = 1.$
29.  $A(4; 6), B(13; 9), C(10; 2), m = 1, n = 3.$
30.  $A(13; 2), B(5; 8), C(6; 1), m = 3, n = 2.$

### *Рекомендуемая литература*

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 9-54.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№1.7-1.13, №№1.18-1.22, №№1.35-1.42, №№1.61-1.72.

### **Индивидуальная работа №2.**

#### **Тема. Предел функции.**

Задание: найти пределы (а, б, в, г); доказать эквивалентность бесконечно малых функций (д).

Варианты заданий:

$$1. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 4}}{2n + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{3x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-2x}{5-2x} \right)^{x+2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x}-2}{3-\sqrt{x+4}};$$

$$\text{д) } \ln(1+x) \sim x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$2. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-n)^3 + (-n)^3}{5n - 2n^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{2x^2 - 4x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-3} \right)^{3x-4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x};$$

$$\text{д) } \ln \cos x \sim -\frac{x^2}{2} \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$3. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-3});$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-1}{5x+3} \right)^{2x+1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2-8x}{\sqrt{x+1}-3};$$

$$\text{д) } \operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3 \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$4. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-n+2)! + n!}{(-n+2)! - n!};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{x+4}-2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln x - \ln(x+5));$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18};$$

$$\text{д) } e^{kx} - 1 \sim kx \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$5. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-3});$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 3x - \cos 7x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{3x}{4} \right)^{\frac{2x-5}{7x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{-6x^2 + 5x + 4};$$

$$\text{д) } \arcsin \alpha x \sim \alpha x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

6. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 4}{\sqrt{5n^4 + 3n^2 - 4}} - 2^{\frac{n}{n^2-3}} \right);$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{x \sin x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{9x+4}{9x+7} \right)^{2x-5};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2};$

д)  $(1+x)^n - 1 \sim nx$  при  $x \rightarrow 0$ .

7. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[3]{5-3n-4n^3}}{7n+9} + \left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{n^2}{3n-2}} \right);$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{x+8}-2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(x+3) - \ln 3);$

г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1};$

д)  $a^{kx} - 1 \sim kx \ln a$  при  $x \rightarrow 0$ .

8. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-3)^3}{(n+1)^3 - (n-2)^3};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3})};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x-5}{6x+7} \right)^{3x+2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3x^2 + x}{2x};$

д)  $\arctg ax \sim ax$  при  $x \rightarrow 0$ .

9. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^{\frac{1}{n}} + (n+1)^{\frac{1}{n}}}{(n+3)^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{3x^3 - 24};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(x-2) - \ln 2);$

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1};$

д)  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  при  $x \rightarrow 0$ .

10. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - \sqrt{2n^4 - 3}}{2n^3 + \sqrt{5n^2 - 4n}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 4x}{\cos x - \cos^3 x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5x+3}{3} \right)^{\frac{x^2-1}{x}};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25};$

д)  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$  при  $x \rightarrow 0$ .

11. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x \sin 3x}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{10x+3}{10x-7} \right)^{2x-3}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{2^x + 8}$ ;

д)  $\sin x - \operatorname{tg} x \sim -\frac{1}{2}x^3$  при  $x \rightarrow 0$ .

12. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2}{\sqrt{4n^4 + 3n^2 - 5}} - \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{2n}{3n^2 - 4}} \right)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x-7} \right)^{4x+5}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 6x - 4}}$ ;

д)  $\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$  при  $x \rightarrow 0$ .

13. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \sin 2x}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n+5}{7n-3} \right)^{5n-4}$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3}{4^x + 1}$ ;

д)  $\ln \cos^2 x \sim -x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

14. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - x - 21}{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 - x - 6}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{11n-7}{11n+5} \right)^{3n-2}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$ ;

д)  $3^{2x} - 1 \sim 2x \ln 3$  при  $x \rightarrow 0$ .

15. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln n - \ln(n+4))$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$ ;

д)  $\arcsin(x-2) \sim (x-2)$  при  $x \rightarrow 2$ .

16. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{2n^4 - 3n^2 + 4}}{5n^2 - \sqrt[3]{n^3 - 2}} + 2^{\frac{1}{3n-5}} \right)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{1 - \cos 2x}$ ;



$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln 4 - \ln \sqrt{x+4});$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{д) } (1 + 2x)^4 - 1 \sim 8x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$17. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{\sqrt{7-x} - \sqrt{x+1}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(-\cos 2x)};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n+5}{4n-3} \right)^{5n+3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x};$$

$$\text{д) } \operatorname{arctg}(x+1) \sim (x+1) \quad \text{при } x \rightarrow -1.$$

$$18. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n+4} - \sqrt[n]{n+2}}{\sqrt[n]{n+4} + \sqrt[n]{n+2}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x(\sqrt{x+4} - 2)};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-5}{4x+3} \right)^{3x-5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1};$$

$$\text{д) } \sin(x^2 + x) \sim x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$19. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+5x} - \sqrt{2}};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln n - \ln n + 3) \ln 2n;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9x^2 + 2x} - \sqrt{9x^2 - x};$$

$$\text{д) } 1 - \cos 8x \sim 32x^2 \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$20. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2}{\sqrt{5n^4 - 7}} - \left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{2n^2-1}{n+1}} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{13x+4}{13x-5} \right)^{3x+5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 5};$$

$$\text{д) } \ln \cos 4x \sim -8x^2 \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$21. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 4x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(-2x)}{4x^2 - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln n - \ln n - 5);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+10} - \sqrt{x+20};$$

$$\text{д) } \sqrt{1-6x} - 1 \sim -3x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

22. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{4x^2 + x - 5};$

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{12n+5}{12n-7} \right)^{4n-5};$

д)  $e^{3x-1} - 1 \sim 3x - 1$  при  $x \rightarrow \frac{1}{3}.$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{1 - \cos 4x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x};$

23. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}}{5x^2 - 7x - 6};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x-3}{x^2 + 2x} \right)^{x+1};$

д)  $\operatorname{tg}(x^2 - x) \sim -x$  при  $x \rightarrow 0.$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \operatorname{tg} 5x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2^x}{3^x + 4^x} \lim;$

24. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3};$

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 3}{n^2 - 3} \right)^{4n+n^2};$

д)  $\sqrt[3]{6x-1} + 1 \sim 2x$  при  $x \rightarrow 0.$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sqrt{4+x-2}};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} 8x \cdot \operatorname{ctg} x;$

25. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{3n^4 - 7}}{5n^2 + 3n} - 4^{\frac{2n}{n^2-1}} \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{x^2 + 3} \right)^{\frac{2x-1}{x}};$

д)  $\ln(1 + \operatorname{tg}^2 3x) \sim 9x^2$  при  $x \rightarrow 0.$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\sqrt{9+5x-3}};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{2x^3 - 2x^2 + x - 1};$

26. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n+5} + \sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n+5} - \sqrt[n]{n+3}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2};$

д)  $1 - 3^{-4x} \sim 4x \ln 3$  при  $x \rightarrow 0.$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x \sin x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + 5x} - \sqrt{2x^2 - 2x}.$

27. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n-1}}{\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{1 - \cos 2x};$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x+2};$$

$$\text{д)} \arcsin(3x+1) \sim 3x+1 \quad \text{при } x \rightarrow -\frac{1}{3}.$$

$$28. \text{ а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3+5+\dots+(n-1)}{n-2} - n \right);$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 7x}{\sin 5x};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2x + 4}{3x^2 + 2x + 1} \right)^{2x^2 - 5};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}};$$

$$\text{д)} 1 - \cos 7x \sim 24,5x^2 \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$29. \text{ а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n - 2^{n+1}};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sin \left( \frac{1}{x-3} \right)}{x^2 - 9} + \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x-3}} \right);$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2} \right)^{3x - x^3};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{1-x} - \sqrt{7+x}};$$

$$\text{д)} (1 - 3x)^{-4} - 1 \sim 12x \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$30. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right);$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2x+9} - 3) \operatorname{ctg} 3x;$$

$$\text{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right); \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{3x^2};$$

$$\text{д)} \operatorname{arctg}(2x-1) \sim 2x-1 \quad \text{при } x \rightarrow \frac{1}{2}.$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 88-119.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№2.5-2.8, №№2.9-2.14, 2.16.

**Индивидуальная работа №3.****Тема. Непрерывность функции**

Задания:

1) Найти точки разрыва, указать их характер и построить график функции;

2) Провести неполное исследование и построить эскиз графика функции.

Варианты заданий:

$$1. \quad 1) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 3x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x^2}{3 - x^2}$$

$$2. \quad 1) f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2, \\ \sqrt{4 - x^2}, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ x - 2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

$$3. \quad 1) f(x) = \begin{cases} 4x + 12, & \text{если } x \leq -2, \\ x^2, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ x - 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x^2 - 3x}{|x|}$$

$$4. \quad 1) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ -x^2, & \text{если } -1 < x < 2, \\ 2x - 8, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$5. \quad 1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ x + 2, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ 4 - x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x^2 + 3x}{|x + 3|}$$

$$6. \quad 1) f(x) = \begin{cases} -x - 4, & \text{если } x \leq -3, \\ x + 2, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ 5 - x^2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{4 - x}{|x|}$$

$$7. \quad 1) f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } x < -1, \\ x^2-4, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x}$$

$$8. \quad 1) f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{если } x < -3, \\ (x+2)^2, & \text{если } -3 < x \leq -1, \\ -x^3, & \text{если } x > -1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2}{2-x}$$

$$9. \quad 1) f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{если } x \leq 0, \\ 2-2x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \ln x, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2-2x-3}{x-1}$$

$$10.1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{если } x < -2, \\ \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ 7-x^2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2-3x}{|x-3|}$$

$$11.1) f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{если } x \leq -1, \\ 1-2x, & \text{если } -1 < x \leq 3, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2-3x-4}{x-2}$$

$$12.1) f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x < 0, \\ -(x-2)^2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ x-4, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 2) y = x^2 + \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$13.1) f(x) = \begin{cases} 2x+10, & \text{если } x \leq -3, \\ \frac{1}{3}x^2+1, & \text{если } -3 < x \leq 2, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{если } x > 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{2x-x^2}{|x|}$$

$$14.1) f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & \text{если } x < -1, \\ -x+3, & \text{если } -1 \leq x \leq 3, \\ -\frac{3}{x}, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2-3x-4}{x}$$

$$15.1) f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ x - 2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ \ln(x - 1), & \text{если } x > 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$$

$$16.1) f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{x + 1}, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ -(x - 4)^2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 2) y = \frac{2x - 3}{|x|}$$

$$17.1) f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2, & \text{если } x \leq -1, \\ 2^x, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$18.1) f(x) = \begin{cases} (0,5)^{x^2}, & \text{если } x < -1, \\ 3 - x^2, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 2x - 3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2}{9 - x^2}$$

$$19.1) f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & \text{если } x \leq -2, \\ x^2 - 4, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ -3^x, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$20.1) f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & \text{если } x < 0, \\ 2 - 3x, & \text{если } 0 \leq x < 2, \\ -(x - 4)^2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{1 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$21.1) f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ 1 - x, & \text{если } -1 < x \leq 3, \\ (0,5)^x, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 2) y = \frac{1 + x}{4 - x^2}$$

$$22.1) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{если } x < -2, \\ 0,5x - 1, & \text{если } -2 \leq x < 3, \\ 2^{x-4}, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 2) y = \frac{4x - x^2}{|x|}$$

$$23.1) f(x) = \begin{cases} 1 - 4x, & \text{если } x \leq 1, \\ -(x - 2)^2 - 2, & \text{если } 1 < x \leq 4, \\ \log_2 x, & \text{если } x > 4. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x|x|}{2 - x}$$

$$24.1) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x \leq -3, \\ x^2 - 5, & \text{если } -3 < x \leq 1, \\ -2 - 2x, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x+2}{|x^2+2x|}$$

$$25.1) f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{если } x < -2,5, \\ 1 + \frac{2,5}{x}, & \text{если } -2,5 \leq x < -1, \\ 2 - x^2, & \text{если } x \geq -1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^3+x}{2|x|}$$

$$26.1) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1}, & \text{если } x \leq -2, \\ x^2+1, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ 4,5x-2,5, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^3-x^2}{2|x-1|}$$

$$27.1) f(x) = \begin{cases} 4^x, & \text{если } x < 0,5, \\ 2x+1, & \text{если } 0,5 \leq x < 3, \\ -(x-4)^2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 2) y = \frac{2x-x^2}{|2-x|}$$

$$28.1) f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2, & \text{если } x \leq -2, \\ 2x+1, & \text{если } -2 < x \leq 0,5, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0,5. \end{cases} \quad 2) y = \frac{3x}{x^2-4}$$

$$29.1) f(x) = \begin{cases} -x-3, & \text{если } x < -1, \\ -x^2-1, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ \log_2 x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = x^2 - \frac{x+2}{|x+2|}$$

$$30.1) f(x) = \begin{cases} \log_3(-x), & \text{если } x \leq -3, \\ 4-x^2, & \text{если } -3 < x \leq 1, \\ \frac{3}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2+2x-3}{|x|}$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 120-144.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№2.17-2.26.

### Индивидуальная работа №4.

#### Тема. Производная функции

Задание:

Найти:

- производную функции (а, б);
- производную неявной функции (в);
- используя правило Лопиталя, вычислить пределы функций (г, д).

Варианты заданий:

1. а)  $y = \ln(\cos x - \sqrt{1 + \cos^2 x})$ ;      б)  $y = \ln x^{\cos^2 x}$ ;

в)  $xe^{\sqrt{x^2+y^2}} - y \operatorname{ctg} x + 2y = 3$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (-e^{2x})^{\operatorname{ctg} 3x}$ ;    д)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\ln x)^{\frac{1}{\pi-2x}}$ .

2. а)  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x}$ ;    б)  $y = \ln x^{\sin x}$ ;

в)  $x^2 - y^2 = x \operatorname{arccot} y$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 2x}$ ;    д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x}$ .

3. а)  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + \frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$ ;    б)  $y = \ln x^{\sin^2 x}$ ;

в)  $e^{2x} \cos y - e^{-y} \sin x = 5$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{6x^3}$ ;    д)

$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$ .

4. а)  $y = 3^{2x} (\cos^2 5x + \sin 2x)$ ;      б)  $y = x^{2 \sin x^2 - 1}$ ;

в)  $4x^3 + 3x^2 y - 2xy^3 + 4 = 0$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$ ;    д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 6x}$ .



5. a)  $y = \sqrt[3]{4x^3 + tg^3}$ ;

б)  $y = x^{\sqrt{2x+\sin 3x}}$ ;

в)  $\sqrt{x^2 - y^2} + \arcsin \sqrt{y} = y \cdot x^{-1}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+3x}}{\sin 7x}$ .

6. a)  $y = \sqrt[3]{3-2x^4} \cdot \sin 3x$ ;

б)  $y = x^{2 \ln x}$ ;

в)  $3x^2 y - xy^2 + 2^3 = y^{-1}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin^3 5x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\tan 2x}$ .

7. a)  $y = \sqrt{3-2x^3} \cdot \arcsin 0,3x$ ;

б)  $y = \cos x^{\sin^2 x}$ ;

в)  $y \cdot e^{2x-y} = \sqrt{\frac{y}{x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\tan x - \sec x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+2x} - 1}{\sin 3x}$ .

8. a)  $y = 3 \arctg 0,5x \cdot \sqrt{2-x^2} + 3x$ ;

б)  $y = \sqrt[4]{x+5}^{x^2-3}$ ;

в)  $\ln y = \sqrt[3]{x-4y^2} + xy$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 7x}{\arctg 2x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \sqrt[3]{1-a}}{\ln \sqrt[3]{x-e^a}}$ .

9. a)  $y = \sqrt[3]{12x+4} \cdot e^{\arctg 3x}$ ;

б)  $y = \sqrt[3]{3x+1}^{2x-3}$ ;

в)  $\cos \sqrt{x^2 - 3y} + \sin \sqrt{x - 2y^2} = 0,5x + 2 = 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{4^x - 5^x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{m}{x^2-1}}$ .

10. a)  $y = \arctg \sqrt{\frac{1-2x}{1+3x}}$ ;

б)  $y = x^{e^x}$ ;

в)  $\sin \sqrt{x+xy-5y} + 3x^2 - 5y^2 = 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln \sqrt{1+2x}}$ .

11. a)  $y = \arcsin \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ ;

б)  $y = \sqrt[3]{\tan 2x}$ ;

в)  $\arctg \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = xy - x^2$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln \sqrt{1+x^{-1}}}$ .

12. a)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ ;

б)  $y = \sqrt[n]{x^{\frac{1}{x}}}$ ;

$$\text{в) } x \cdot e^{3x-2y} - 6y^2 + \cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 7}{e^{2x}}; \quad \text{д) }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 3x}.$$

$$13. \text{ а) } y = \sqrt[3]{\frac{2 - \operatorname{tg} 5x}{2 + \operatorname{tg} 5x}};$$

$$\text{б) } y = \ln x^{\frac{x}{2}};$$

$$\text{в) } \arcsin \sqrt{2 - 2y} + \frac{x}{y^2} = y\sqrt{x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}$$

$$14. \text{ а) } y = \sqrt[4]{3x^2 + 2} \cdot \cos^2 \sqrt{-5x^2}; \quad \text{б) } y = x^{\arcsin 3x};$$

$$\text{в) } 4x^2 + y = \sqrt{y} \sqrt{y^2 - 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x - 1}; \quad \text{д) }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \sqrt{-3x^2} \operatorname{cosec}^2 x.$$

$$15. \text{ а) } y = 2^{\frac{\ln \sin 3x}{2 - \cos 3x}};$$

$$\text{б) } y = x^{\cos^2 4x};$$

$$\text{в) } \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 2y; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{д) }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( e^x + x \right)^{-1}.$$

$$16. \text{ а) } y = \ln^2 \arccos 5x;$$

$$\text{б) } y = \ln 2x^{\cos x};$$

$$\text{в) } \sqrt{2x^2 + 5y} = 3y^2 + 2x; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \pi - 2 \operatorname{arctg} x \right) \ln x; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{x}.$$

$$17. \text{ а) } y = \ln^5 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right);$$

$$\text{б) } y = \cos 2x^{\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } x \cdot \arcsin y = 2x^2 - x\sqrt{y} - \sqrt{x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

$$18. \text{ а) } y = \ln \sqrt[3]{\frac{\cos 3x}{1 - \cos 3x}};$$

$$\text{б) } y = \ln x^{\sqrt{x^2 + x}};$$

в)  $\arctg(y - x^2) + \sin x - \cos xy = 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\ln x}$ .

19. а)  $y = \sqrt[4]{5 - 2x^3} \cdot \frac{x^2}{3}$ ; б)  $y = \arctg 2x^{\sqrt[3]{x}}$ ;

в)  $\ln \cos \frac{x}{y} - 0,5 \operatorname{tg}^2 y = x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1 + e^x)$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{2}{x}}$ .

20. а)  $y = 2^{\arctg^3 5x}$ ; б)  $y = \operatorname{ctg} 2x^{\operatorname{tg} 3x}$ ;

в)  $e^{\sqrt[3]{x^2 - yx}} = \sqrt{\frac{y}{\sin x}}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^4 + x^2 + 1)}{\ln(x^4 + x - 1)}$ .

21. а)  $y = \sin^3 \ln \frac{x^2}{5}$ ; б)  $y = \arccos 2x^{e^{\sin 3x}}$ ;

в)  $2^{\arctg(\sqrt{y})} = y^2 \sqrt{x} - \ln 3x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln^{-1} x - x^{-1})$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$ .

22. а)  $y = x \arctg 2x - \ln(-4x^2)$ ; б)  $y = (\sin x)^{\sin^2 3x}$ ;

в)  $\ln \operatorname{tg} \frac{y}{x} - y^2 + xy = x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3x}{\operatorname{ctg} 5x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$ .

23. а)  $y = \log_2 \sqrt{\frac{3x+1}{8-3x}} \cdot \cos^2 7x$ ; б)  $y = (1 + \ln(x+1))^{2 \sin x}$ ;

в)  $y = x^2 \ln(-y^2) + xy$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}$ .

24. а)  $y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{5x}}$ ; б)  $y = (-5x)^{\sqrt[3]{x-2}}$ ;

в)  $\cos x \sqrt{y} + \sin y \sqrt{x} + \ln \frac{x}{y} = 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x - \operatorname{cosec} x)$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\ln 2x}$ .

25. а)  $y = \frac{\sqrt{\arcsin 2x}}{1 - 3x^2}$ ; б)  $y = (\ln 2x + e^{3x})^{\sqrt[3]{x}}$ ;

в)  $x \ln(x^2 + y^2) + x \cdot \sin xy = 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln^{-1} x - \frac{x}{x-1} \right)$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{e^{3x} - 1}$ .

$$26. \text{ а) } y = \operatorname{ctg}^3 \sqrt{\frac{1+e^{4x}}{1-e^{4x}}};$$

$$\text{б) } y = \arcsin 2x \cdot \ln x;$$

$$\text{в) } \ln \sqrt{x^2 - 2y} + \operatorname{ctg} x - \arctg \frac{y}{x} = 0; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x-3}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-x^2)}{\sin^2 3x}.$$

$$27. \text{ а) } y = \ln^2 \sin(x^3 - 2) \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$\text{б) } y = \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{0,5x};$$

$$\text{в) } x^2 \cos \frac{x}{y} - e^{xy} + \ln x = 0; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (-x)^{\frac{\pi x}{2}}.$$

$$28. \text{ а) } y = (\ln x - 16x^2) \arcsin 4x;$$

$$\text{б) } y = \ln 2x \cdot \arcsin 3x;$$

$$\text{в) } x \cdot e^{xy} + y \cdot e^{-\frac{x}{y}} = 3^{5x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^{-1} \cdot \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right); \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{5x} - 1}.$$

$$29. \text{ а) } y = \frac{\cos(\log_3(-\sqrt{x}))}{\sin x^2};$$

$$\text{б) } y = (-5 \sin^2 3x)^{x+1};$$

$$\text{в) } y^3 \sin(e^2 y) \cdot x^3 \cos(y^2) = 3e^5; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x+1)}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \pi} \ln(+\cos x) \cdot (-\pi).$$

$$30. \text{ а) } y = 4 \sqrt{\frac{\sin 5x}{2 - e^{4x}}} \cdot \ln x;$$

$$\text{б) } y = \arcsin 3x \cdot \arccos 3x;$$

$$\text{в) } \ln(\ln y \sqrt{x}) + 0,5 \operatorname{tg}^2 \frac{y}{\sqrt{x}} = 0; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+5x} - 1}{x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (+e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 152-195, 207-214.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№3.54-3.57, №№3.62-3.77, 4.10.

**Индивидуальная работа №5.****Тема. Применение дифференциального исчисления для исследования функций**

Задание:

1) Провести полное исследование и построить график функции;

2) Проверить, применима ли:

– теорема Ролля для функций в заданиях с четными номерами;

– теорема Лагранжа для функций в заданиях с нечетными номерами.

Построить графики этих функций на заданных отрезках.

1) Варианты заданий:

1.  $y = \frac{x^3 - 8}{x}.$

2.  $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}.$

3.  $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}.$

4.  $y = x + \frac{2}{x + 2}.$

5.  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$

6.  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$

7.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$

8.  $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}.$

9.  $y = \frac{8x - 1}{x^2 + 1}.$

10.  $y = \frac{3x - 2}{x^3}.$

11.  $y = \frac{4x + 1}{x^2 - 1}.$

12.  $y = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}.$

13.  $y = \frac{x^3}{3 - x^2}.$

14.  $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}.$

15.  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$

16.  $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}.$

17.  $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1}.$

18.  $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}.$

19.  $y = \frac{x}{x^2 + x - 2}.$

20.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$

21.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$

22.  $y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}.$

23.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}.$

24.  $y = \frac{4x^2}{x^3 + 1}.$

25.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$

26.  $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}.$

27.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}.$

$$28. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}. \quad 29. y = \frac{x^3}{2\sqrt{x-1}}. \quad 30. y = \frac{x^3}{\sqrt{x-2}}.$$

2) Варианты заданий:

$$1. y = \sqrt[3]{x-2} - 2, \quad x \in [4; +\infty).$$

$$2. y = \arccos x, \quad x \in [-1; 0].$$

$$3. y = x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [1; 1].$$

$$4. y = \sqrt{1 + \cos 2x}, \quad x \in [0; \pi].$$

$$5. y = x|x+2|, \quad x \in [-2; 2].$$

$$6. y = |x^2 - 4x|, \quad x \in [0; 4].$$

$$7. y = 2 - \sqrt[3]{1-x}, \quad x \in [0; 2].$$

$$8. y = \sqrt[3]{x-3}, \quad x \in [5; +\infty).$$

$$9. y = 2 - \sqrt[3]{x-1}, \quad x \in [0; 2].$$

$$10. y = x + \sqrt[3]{3-x}, \quad x \in [3; +\infty).$$

$$11. y = \sqrt[3]{4-x}, \quad x \in [4; +\infty).$$

$$12. y = x^2 - 2|x|, \quad x \in [2; +\infty).$$

$$13. y = |x^2 - 2x|, \quad x \in [3; +\infty).$$

$$14. y = 2 - \sqrt[5]{x^4}, \quad x \in [2; 2].$$

$$15. y = x|x-3|, \quad x \in [5; +\infty).$$

$$16. y = x^2 + 2|x|, \quad x \in [2; 0].$$

$$17. y = x|2-x|, \quad x \in [0; 2].$$

$$18. y = \sqrt[3]{x+2} - 2, \quad x \in [3; 0].$$

$$19. y = 3|x| - x^2, \quad x \in [2; 2].$$

$$20. y = \ln \sin x, \quad \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right].$$

$$21. y = \arcsin x, \quad x \in [0; 1].$$

$$22. y = \sqrt[3]{x+1} - 1, \quad x \in [2; 0].$$

$$23. y = \sqrt[3]{x^2} - 3, \quad x \in [1; 4].$$

$$24. y = \ln \cos x, \quad \left[ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right].$$

$$25. y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x-x^2} - 2, \quad x \in [3; +\infty).$$

$$26. y = x|2-x|, \quad x \in [3; +\infty).$$

$$27. y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x, \quad x \in [1; 1].$$

$$28. y = \log_3 |2-x|, \quad x \in [5; +\infty).$$

$$29. y = \log_2 |x-1|, \quad x \in [1; 3].$$

$$30. y = \sqrt{1 - \cos 2x}, \quad \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред.

Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 195-206, 214-256.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№4.1-4.9, №№4.11-4.13, 4.30-4.39.

### Индивидуальная работа №6.

#### Тема. Применение дифференциального исчисления в экономических исследованиях

Задания:

1) Дана функция полных издержек  $K(x)$ , где  $x$  - объем производства.

а) Исследовать динамику функции  $K(x)$  и построить её кривую.

Провести экономический анализ;

б) Построить кривую предельных издержек и провести экономический анализ;

в) Построить кривую переменных средних издержек и провести экономический анализ. Все три кривые построить на одной координатной плоскости;

г) Вычислить показатели эластичности функции  $K(x)$  при  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , дать экономическую оценку.

2) Дана функция спроса  $S = S(p)$ , где  $p$  – цена товара. Построить (на одной координатной плоскости) кривые спроса  $S(p)$ , эластичности спроса  $E_p$  относительно цены, выручки  $V(p)$ .

Определить цены, при которых спрос

– неэластичен,

– эластичен,

- нейтрален,
- совершенно неэластичен,
- совершенно эластичен.

Варианты заданий:

1. 1)  $K \hookrightarrow 2x^3 - 24x^2 + 100x + 60, x_1 = 2, x_2 = 6;$  2)

$$S = 24 - 3p.$$

2. 1)  $K \hookrightarrow \frac{x^3}{2} - \frac{15}{2}x^2 + 40x + 30, x_1 = 4, x_2 = 8;$  2)  $S = 6 - p.$

3. 1)  $K \hookrightarrow \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 50x + 20, x_1 = 3, x_2 = 9;$  2)  $S = 8 - 2p.$

4. 1)  $K \hookrightarrow x^3 - 6x^2 + 13x + 8, x_1 = 1, x_2 = 4;$  2)  $S = 1 - \frac{p}{8}.$

5. 1)  $K \hookrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 17x + 10, x_1 = 2, x_2 = 5;$  2)  $S = 7 - 2p.$

6. 1)  $K \hookrightarrow x^3 - 7x^2 + 18x + 15, x_1 = 2, x_2 = 4;$  2)  $S = 4 - p.$

7. 1)  $K \hookrightarrow \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x + 18, x_1 = 1, x_2 = 4;$  2)  $S = 1 - \frac{p}{6}.$

8. 1)  $K \hookrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 30x + 15, x_1 = 1, x_2 = 3;$  2)  $S = 10 - 2p.$

9. 1)  $K \hookrightarrow x^3 - 9x^2 + 28x + 12, x_1 = 2, x_2 = 5;$  2)  $S = 9 - 2p.$

10. 1)  $K \hookrightarrow \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 25x + 20, x_1 = 2, x_2 = 5;$  2)  $S = 9 - p.$

11. 1)  $K \hookrightarrow x^3 - 12x^2 + 50x + 15, x_1 = 1, x_2 = 6;$  2)  $S = 7 - p.$

12. 1)  $K \hookrightarrow \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 10x + 18, x_1 = 3, x_2 = 5;$  2)  $S = 3 - \frac{p}{2}.$

13. 1)  $K \hookrightarrow 2x^3 - 18x^2 + 55x + 30, x_1 = 1, x_2 = 4;$  2)  $S = 2 - \frac{p}{4}.$

14. 1)  $K \hookrightarrow \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 8x + 14, x_1 = 1, x_2 = 3;$  2)  $S = 6 - \frac{3p}{2}.$

15. 1)  $K \hookrightarrow x^3 - 8x^2 + 24x + 20, x_1 = 2, x_2 = 4;$  2)  $S = 1 - \frac{p}{4}.$



$$16. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 10, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4; \quad 2) S = 12 - 2p.$$

$$17. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) x^3 - 15x^2 + 80x + 40, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 6; \quad 2) S = 11 - p.$$

$$18. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{6} - 3x^2 + 19x + 20, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 7; \quad 2) S = 4 - \frac{p}{2}.$$

$$19. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 27x + 5, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6; \quad 2) S = 14 - 2p.$$

$$20. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{2} - \frac{9}{2}x^2 + 15x + 4, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4; \quad 2) S = 7 - \frac{p}{2}.$$

$$21. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x + 8, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3; \quad 2) S = 2 - \frac{p}{3}.$$

$$22. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 38x + 10, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 7; \quad 2) S = 6 - \frac{p}{2}.$$

$$23. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{7}{2}x^2 + 25x + 12, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 9; \quad 2) S = 2 - \frac{p}{6}.$$

$$24. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) x^3 - 18x^2 + 110x + 20, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 8; \quad 2) S = 12 - 3p$$

.

$$25. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{12} - 2x^2 + 17x + 10, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 10; \quad 2) S = 4 - \frac{p}{3}.$$

$$26. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) x^3 - 21x^2 + 150x + 30, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 8; \quad 2) S = 3 - \frac{p}{4}.$$

$$27. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{12} - x^2 + 5x + 6, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6; \quad 2) S = 16 - 2p$$

.

$$28. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{6} - \frac{5}{2}x^2 + 14x + 8, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 7; \quad 2) S = 18 - 3p.$$

$$29. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{x^3}{12} - \frac{3}{2}x^2 + 10x + 12, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 8; \quad 2) S = 12 - p.$$

$$30. \quad 1) K \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right) x^3 - 24x^2 + 200x + 50, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 9. \quad 2)$$

$$S = 24 - 4p.$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 304-330.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№ 5.1-5.30

### Индивидуальная работа №7.

#### Тема. Экстремумы функций многих переменных

Задания:

Найти: а) полный дифференциал функции  $z = f(x, y)$ ;

б) экстремум функции  $z = f(x, y)$ ;

в) экстремум функции  $z = f(x, y)$  при условии, что переменные  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $\varphi(x, y) = 0$ .

Варианты заданий:

1. а)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;

б)  $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$ ;

в)  $z = 2x + y$ , если  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4$ .

2. а)  $z = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$ ;

б)  $z = x^3 - y^2 - 3x + 2y$ ;

в)  $z = 2xy + y^2$ , если  $xy^2 = 8$ .

3. а)  $z = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$ ;

б)  $z = x^3 - y^2 - 3x - 2y$ ;

в)  $z = x - 2y$ , если  $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ .

4. а)  $z = y \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

б)  $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ ;

в)  $z = x^2 + y^2$ , если  $x + y = 2$ .

5. а)  $z = x\sqrt{y} + e^{\frac{y}{x}}$ ;

б)  $z = xy \sqrt{x - y}$ ;

в)  $z = xy$ , если  $x^2 + y^2 = 8$ .

6. а)  $z = \ln \sqrt{\frac{2x+3y}{4x-5y}}$ ;

б)  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ;

в)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , если  $x + y = 2$ .

7. а)  $z = \frac{\sin(x-y)}{x^2} + \sqrt{y} \cdot \cos(x-2y)$ ;

б)  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 2x + 1$ ;

в)  $z = x + 2y$ , если  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$ .

8. а)  $z = \operatorname{ctg}(x+5y) e^{xy}$ ;

б)  $z = x^2 + y^3 - 6xy - 9x - 21y + 1$ ;

в)  $z = 2xy + x^2$ , если  $x^2 y = 8$ .

9. а)  $z = y\sqrt{1-x^2} - \arcsin \frac{x}{y}$ ;

б)  $z = x^3 + (y-1)^2 - 3x + 2y$ ;

в)  $z = y - 3x$ , если  $x^2 + y^2 = 10$ .

10. а)  $z = 3^{\arccos \sqrt{2xy-y^2}}$ ;

б)  $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;

в)  $z = x^2 + y^2 - xy$ , если  $x + y - 2 = 0$ .

11. а)  $z = \frac{1}{x \cos y - y \sin x}$ ;

б)  $z = x^2 y + xy^2 - 2xy$ ;

в)  $z = x^2 + 2y^2$ , если  $2x + y = 3$ .

12. а)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ ;

б)  $z = x^3 + 3xy + 2y^2 + y$ ;

в)  $z = x + y$ , если  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ .

13. а)  $z = \ln \frac{1 - x - y + xy}{1 - x - y}$ ;

б)  $z = x^2 y + \frac{y^2}{2} + 2x^2 - 2y$ ;

в)  $z = x^2 + y^2$ , если  $x + 3y = 5$ .

14. а)  $z = 2^{y\sqrt{x}} - y \cdot 2^{x\sqrt{y}}$ ;

б)  $z = 2y\sqrt{x} - 3y^2 - 2x + 5y$ ;

в)  $z = xy$ , если  $x^2 + y^2 = 2$ .

15. а)  $z = x \arcsin \sqrt{y^2 - x^2}$ ;

б)  $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$ ;

в)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , если  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{9}$ .

16. а)  $z = x^2 + y^2 e^{\frac{x^2 - y^2}{xy}}$ ;

б)  $z = 6xy - x^3 - y^3$ ;

в)  $z = x + 2y$ , если  $x^2 + y^2 = 5$ .

17. а)  $z = y\sqrt{\ln y^x}$ ;

б)  $z = x^3 + 2y^2 - 12x - 4y$ ;

в)  $z = 2x + 3y$ , если  $x^2 + y^2 = \frac{13}{9}$ .

18. а)  $z = \arccos \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ ;

б)  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ ;

в)  $z = xy + 8x + 8y$ , если  $xy = 5$ .

19. а)  $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;

б)  $z = xy^2 + \frac{x^2}{2} - x + y^2$ ;

в)  $z = x^2 + y^2$ , если  $x + 2y = 1$ .

20. а)  $z = \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ ;

б)  $z = 2x^2 - 3xy + y^3 - x$ ;

в)  $z = x + y$ , если  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ .

21. а)  $z = \arcsin \sqrt{\frac{3x - 2y}{4x + 7y}}$ ;

б)  $z = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 5x$ ;

в)  $z = xy$ , если  $4x - y = 2$ .

22. а)  $z = \cos(2 - 3xy^2 + y^3)$ ;

б)  $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y$ ;

в)  $z = 2x^2 + y^2$ , если  $x + y = 2$ .

23. а)  $z = \sin(y) e^{\frac{x}{y}} - x^3 y$ ;

б)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy$ ;

в)  $z = x^2 + y^2$ , если  $x + 3y = 5$ .

24. а)  $z = xy \cdot 5^{\sin(x-y)}$ ;

б)  $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$ ;

в)  $z = 2x - y$ , если  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2y^2} = \frac{3}{2}$ .

25. а)  $z = x\sqrt{\ln x^y}$ ;

б)  $z = xy - x^2 y - xy^2$ ;

в)  $z = xy$ , если  $x^2 + y^2 = 18$ .

26. а)  $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$ ;

б)  $z = \sqrt{x + 3} + \frac{y^3}{3} + xy$ ;

в)  $z = 2xy + y^2$ , если  $x^2 y = 1$ .

27. а)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ ;

б)  $z = \frac{x^2}{2} + 4xy + \frac{y^3}{3} - 7x$ ;

в)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , если  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ .

28. а)  $z = 4x - 5y - \sqrt{x^2 - y^2}$ ;

б)  $z = x^3 + 2xy + y^2 - x - y$ ;

в)  $z = x^2 + y^2$ , если  $2x + y = 5$ .

29. а)  $z = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$ ;

б)  $z = 2x^2 + 2x\sqrt{y} + y + x$ ;

в)  $z = x + y$ , если  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ .

30. а)  $z = e^x (\cos y + x \sin y)$ ;

б)  $z = x^2 + y^3 + 4x - 27y$ ;

в)  $z = xy$ , если  $x + 2y = 3$ .

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 268-303.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№6.46-6.55, №№6.80-6.89, 6.90-6.103.

### Индивидуальная работа №8.

#### Тема. Методы интегрирования

Задание:

Найти интегралы.

Варианты заданий:

- |  |   |
|--|---|
| 1. а) $\int \frac{ctg x dx}{\ln^2 \sin x};$        | б) $\int x \ln(1-2x) dx;$                   |
| в) $\int e^x \sqrt{3e^x - 2} dx;$                  | г) $\int \frac{5x+7}{x^2 + x - 20} dx.$     |
| 2. а) $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x};$      | б) $\int (x^2 - 3x + 4)e^{\frac{x}{3}} dx;$ |
| в) $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)};$                | г) $\int \frac{13-x}{x^2 + 4x + 3} dx.$     |
| 3. а) $\int \cos^3 x \sin 2x dx;$                  | б) $\int (2x+1)5^{-x} dx;$                  |
| в) $\int \frac{\sqrt{\ln 3x} dx}{x};$              | г) $\int \frac{4x-17}{x^2 - 8x + 15} dx.$   |
| 4. а) $\int \frac{tg x dx}{\sqrt[3]{\ln \cos x}};$ | б) $\int (2+4x-x^4)\ln(3x) dx;$             |
| в) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx;$                    | г) $\int \frac{9x+36}{x^2 + 5x - 14} dx.$   |
| 5. а) $\int x \sqrt[3]{1-x} dx;$                   | б) $\int (x+4)e^{5x} dx;$                   |

- Б)  $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$ ;
 Г)  $\int \frac{15 - x}{x^2 - 9x + 8} dx$ .
6. а)  $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$ ;
 б)  $\int (7x + 6) \sin 3x dx$ ;
- Б)  $\int x^4 \sqrt[3]{1 - 2x^5} dx$ ;
 Г)  $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x - 5} dx$ .
7. а)  $\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx$ ;
 б)  $\int (2 - 7x) e^{4x+1} dx$ ;
- Б)  $\int \frac{\sqrt{1 + 2 \ln x}}{x} dx$ ;
 Г)  $\int \frac{11 - x}{3x^2 + 11x + 6} dx$ .
8. а)  $\int \sin^4 3x dx$ ;
 б)  $\int x^4 \ln 3x dx$ ;
- Б)  $\int \frac{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ ;
 Г)  $\int \frac{5x - 5}{2x^2 - 3x - 2} dx$ .
9. а)  $\int \sin^3 x \sin 2x dx$ ;
 б)  $\int (3x - 5) 2^x dx$ ;
- Б)  $\int \frac{(1 - 3 \operatorname{arctg} x)^2}{1 + x^2} dx$ ;
 Г)  $\int \frac{6x + 9}{2x^2 + x - 1} dx$ .
10. а)  $\int \frac{\sin^3 x + 2}{\cos^2 x} dx$ ;
 б)  $\int \frac{\ln x}{x^5} dx$ ;
- Б)  $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ ;
 Б)  $\int \frac{7x + 14}{4x^2 - x - 3} dx$ .
11. а)  $\int \frac{\sqrt{3x + 5}}{x} dx$ ;
 б)  $\int x^2 \sin \frac{x}{2} dx$ ;
- Б)  $\int e^x (2 + e^{2x})^2 dx$ ;
 Г)  $\int \frac{5x + 4}{3x^2 + 7x - 6} dx$ .
12. а)  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$ ;
 б)  $\int x^3 e^{-x^2} dx$ ;
- Б)  $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$ ;
 Г)  $\int \frac{11x + 41}{3x^2 - 7x - 20} dx$ .
13. а)  $\int x e^{2x^2 - 3} dx$ ;
 б)  $\int x \sin^2 x dx$ ;

$$\text{B)} \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^2}};$$

$$14. \text{ a)} \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}};$$

$$\text{B)} \int \frac{e^{3x} dx}{1+e^{6x}};$$

$$15. \text{ a)} \int \frac{-\cos x dx}{-\sin x};$$

$$\text{B)} \int \frac{dx}{x(1+\sqrt{\ln x})};$$

$$16. \text{ a)} \int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sqrt[3]{4 \ln \sin x - 3}};$$

$$\text{B)} \int (2-3e^{4x})^5 e^{4x} dx;$$

$$17. \text{ a)} \int \sin 5x \sin 3x dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{\sqrt[5]{2 \ln(x+1)-3}}{x+1} dx;$$

$$18. \text{ a)} \int \frac{e^{\arcsin 4x} dx}{\sqrt{1-16x^2}};$$

$$\text{B)} \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 3x)} dx;$$

$$19. \text{ a)} \int \frac{x^3 - x}{x^4 + 1} dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{e^{\sin 3x} \cos 3x}{\sqrt{4-e^{\sin 3x}}} dx;$$

$$20. \text{ a)} \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\ln \cos x - 1};$$

$$\text{B)} \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1-e^{4x}}};$$

$$\text{r)} \int \frac{31x-1}{4x^2+7x-2} dx.$$

$$\text{б)} \int (x-2) \operatorname{arctg}(2-x) dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{x+41}{2x^2+11x+5} dx.$$

$$\text{б)} \int (7x+6) \sin 3x dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{x-37}{5x^2-13x-6} dx.$$

$$\text{б)} \int x \operatorname{arctg} 5x dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{2x^2+x-1}{x^3-2x^2+x} dx.$$

$$\text{б)} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{x-23}{2x^2-x-6} dx;$$

$$\text{б)} \int x \cos(2x + \frac{\pi}{3}) dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{2x^2+57x+34}{(x-6)(x+2)^2} dx.$$

$$\text{б)} \int x^3 \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{-6x^2+35x+43}{(x-3)^2(x-1)} dx.$$

$$\text{б)} \int (5x+3) \sin 4x dx;$$

$$\text{r)} \int \frac{8x^2+8x-3}{(x-2)(x+1)^2} dx.$$



21. a)  $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x dx}{\sin 2x};$

б)  $\int \frac{3+x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

22. a)  $\int \sin^5 x \cos^4 x dx;$

б)  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{2-5 \ln x}};$

23. a)  $\int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + x - 6} dx;$

б)  $\int \frac{e^{-3x}}{\sqrt{4-5e^{-3x}}} dx;$

24. a)  $\int (x+1) \cos^2 \frac{x}{2} dx;$

б)  $\int (2+e^{3x})^2 e^x dx;$

25. a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} \arccos^5 2x};$

б)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$

26. a)  $\int \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\sin 2x} dx;$

б)  $\int \frac{x dx}{3+\sqrt{x^2-2}};$

27. a)  $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx;$

б)  $\int \frac{\sqrt[3]{5-4 \ln^2 x} \ln x}{x} dx;$

28. a)  $\int \frac{(\cos x + \sin x) dx}{(\cos^2 x + 2 \sin x)^3};$

б)  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

г)  $\int \frac{-11x^2+53x-52}{x(x-2)^2} dx.$

б)  $\int (2-3x) \sin \frac{x}{3} dx;$

г)  $\int \frac{7x^2+3x+5}{x^3+x} dx.$

б)  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

г)  $\int \cos^4 x dx.$

б)  $\int \frac{3-2\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx;$

г)  $\int \frac{4x+12}{x^3+4x} dx.$

б)  $\int \sqrt[3]{x^2} \ln \frac{x}{2} dx;$

г)  $\int \frac{-5x^2+2x-36}{x^3+9x} dx.$

б)  $\int (x^2+x) \cos 4x dx;$

г)  $\int \frac{10x^2-5x+7}{(x^2+3)(x-1)} dx.$

б)  $\int (3x-4) \cos \frac{x}{2} dx;$

г)  $\int \frac{-4x^2+17x-53}{(x^2+5)(x+3)} dx.$

б)  $\int \frac{2x+5}{\cos^2 x} dx;$

$$в) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 5}};$$

$$г) \int \frac{15x^2 + 19x - 106}{(2x-3)(x+2)(x-4)} dx.$$

$$29. а) \int x \ln \sqrt{x+1} dx;$$

$$б) \int \frac{\arcsin^3 \frac{2}{x} dx}{x\sqrt{x^2 - 4}};$$

$$в) \int \frac{dx}{2-3\cos x};$$

$$г) \int \frac{7x^2 + 7x + 12}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx.$$

$$30. а) \int \frac{e^{\arcsin 3x} dx}{\sqrt{1-9x^2}};$$

$$б) \int \arctg(x+1) dx;$$

$$в) \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x};$$

$$г) \int \frac{15x^2 - 62x + 59}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 331-383.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№ 7.1-7.21.

### Индивидуальная работа №9.

#### Тема. Определенный интеграл

Задания:

Вычислить определенные интегралы (а), (б);

исследовать сходимость несобственного интеграла (в);

вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной линиями (г).

Варианты заданий:

$$1. а) \int_1^5 \frac{3x+2}{\sqrt{2x-1}} dx;$$

$$б) \int_0^{1/3} x e^{-3x} dx;$$

$$\text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^3};$$

$$2. \text{ a)} \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+10x+29};$$

$$3. \text{ a)} \int_3^{10} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-2}};$$

$$\text{B)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x + 1};$$

$$4. \text{ a)} \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$\text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x}.$$

$$5. \text{ a)} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^3 x dx;$$

$$\text{B)} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2-2x+17};$$

$$6. \text{ a)} \int_0^1 \frac{\arctg^2 x + x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{B)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{\ln^5 x}};$$

$$7. \text{ a)} \int_1^e x^3 \ln \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+4} dx;$$

$$8. \text{ a)} \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{4-\ln^2 x}};$$

$$\text{r)} y = x^2 + 2x + 2 \quad \text{и} \quad x + y = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^e x \ln^2 x dx;$$

$$\text{r)} y = -2x^2 - 12x - 15 \quad \text{и} \quad 2x + y + 3 = 0.$$

$$\text{б)} \int_{-2}^0 (x^2 - 1) e^{-\frac{x}{2}} dx;$$

$$\text{r)} y = x^2 + 8x + 13 \quad \text{и} \quad y - 3x - 9 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^1 (x-2) e^{-x} dx;$$

$$\text{r)} y = -2x^2 - 4x + 1 \quad \text{и} \quad 2x - y + 1 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx;$$

$$\text{r)} y = x^2 - 10x + 23 \quad \text{и} \quad x + y - 5 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^{1/2} x e^{-2x} dx;$$

$$\text{r)} y = -2x^2 - 16x - 37 \quad \text{и} \quad y + 7 = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^9 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$\text{r)} y = x^2 - 4x + 5 \quad \text{и} \quad y - x - 1 = 0.$$

$$\text{б)} \int_{-0.5}^0 (6x+1) e^{-2x} dx;$$

$$\text{В)} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2};$$

$$9. \text{ а)} \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1};$$

$$\text{В)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^3};$$

$$10. \text{ а)} \int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$\text{В)} \int_{-\infty}^0 \frac{6x-5}{x^2+9} dx;$$

$$11. \text{ а)} \int_0^{\pi/3} \cos x \cos 5x dx;$$

$$\text{В)} \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+4} dx;$$

$$12. \text{ а)} \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x} dx}{\cos^2 x};$$

$$\text{В)} \int_{-\infty}^1 \frac{x dx}{1-x};$$

$$13. \text{ а)} \int_0^3 \frac{x-2}{x^2+8x+20} dx;$$

$$\text{В)} \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{9+x^4};$$

$$14. \text{ а)} \int_0^5 \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}} dx;$$

$$\text{В)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+2\ln x)};$$

$$\text{г)} y = -2x^2 + 8x - 1 \text{ и } 6x - y - 1 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi} (x-2) \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$\text{г)} y = x^2 - 6x + 10 \text{ и } 2x + y - 10 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi/2} (x-1) \cos 2x dx;$$

$$\text{г)} y = -2x^2 + 16x - 33 \text{ и } 4x + y - 9 = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

$$\text{г)} y = -x^2 - 4x - 4 \text{ и } 2x + y + 4 = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$\text{г)} y = 3x^2 + 12x + 8 \text{ и } 3x - y + 8 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin^2 x dx;$$

$$\text{г)} y = -x^2 - 8x - 14 \text{ и } 3x + y + 8 = 0.$$

$$\text{б)} \int_{1/3}^{e/3} x^4 \ln 3x dx;$$

$$\text{г)} y = -3x^2 + 12x - 13 \text{ и } 3x + y - 5 = 0$$

15. а)  $\int_6^8 e^{\frac{x}{2}} - 4 dx;$

б)  $\int_{-\infty}^1 \frac{xdx}{-x^2};$

16. а)  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}};$

б)  $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x+2};$

17. а)  $\int_1^3 (x-1)e^{-\frac{x}{3}} dx;$

б)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^4+3}{x^5} dx;$

18. а)  $\int_0^{\pi/3} (x+2) \sin 3x dx;$

б)  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4x+13};$

19. а)  $\int_0^2 (x^2+4)e^{-\frac{x}{2}} dx;$

г)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^3}};$

20. а)  $\int_1^{1/3} (x+2)e^{3x} dx;$

б)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+4}{x^4} dx;$

21. а)  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x-2) \sin^2 \frac{x}{2} dx;$

б)  $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1};$

г)  $y = 7 - x^2$  и  $y - 2x - 4 = 0.$

б)  $\int_1^2 (x-2)e^{2x} dx;$

г)  $y = \frac{x^2}{2} + 1$  и  $x - y + 5 = 0.$

б)  $\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1} dx;$

г)  $y = -x^2 + 2x - 2$  и  $y + 5 = 0.$

б)  $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}};$

г)  $y = -0,5x^2 + 3x - 2,5$  и  $x - y - 1 = 0.$

б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{3 \operatorname{tg} x + 1}};$

г)  $y = -x^2 + 12x - 31$  и  $2x - y - 15 = 0.$

б)  $\int_4^6 \frac{2x+3}{x^2-2x-3} dx;$

г)  $y = 0,5x^2 + 5x + 11,5$  и  $x + 2y + 5 = 0.$

б)  $\int_0^2 x^2 \sqrt{9-x^2} dx;$

$$\text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x} dx;$$

$$22. \text{ a)} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (x^2 - 3) \cos 3x dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx;$$

$$23. \text{ a)} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x};$$

$$\text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{4x-3}{x^2+4} dx;$$

$$24. \text{ a)} \int_4^{12} \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}-1};$$

$$\text{B)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+1};$$

$$25. \text{ a)} \int_0^{0.5} \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}};$$

$$\text{B)} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{4+x^6};$$

$$26. \text{ a)} \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{ctg}^2 x dx;$$

$$\text{B)} \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-2x}};$$

$$27. \text{ a)} \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}+1};$$

$$\text{B)} \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x-1};$$

$$28. \text{ a)} \int_0^{1/2} \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x}};$$

$$\text{r)} y = 2x^2 + 1 \text{ и } 2x + y - 1 = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{r)} y = -0.5x^2 - 4x - 5 \text{ и } 2x + y + 11 = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(x+1)};$$

$$\text{r)} y = 2x^2 - 4x + 5 \text{ и } y - 2x - 5 = 0.$$

$$\text{б)} \int_1^{1.5} \operatorname{arctg} \sqrt{4x-3} dx;$$

$$\text{r)} y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \text{ и } 2x - y + 4 = 0.$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi/3} x \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$\text{r)} y = 2x^2 - 12x + 14 \text{ и } -4x + y + 16 = 0.$$

$$\text{б)} \int_2^3 \frac{2x^3 - x - 3}{x^2 + 5x - 6} dx;$$

$$\text{r)} y = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 13 \text{ и } x - y - 13 = 0$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi/4} x \sin^2 2x dx;$$

$$\text{r)} y = 2x^2 + 8x + 13 \text{ и } 2x + y - 5 = 0.$$

$$\text{б)} \int_3^5 \frac{x+3}{x^2+3x-10} dx;$$

$$в) \int_{-\infty}^0 \frac{x^3 dx}{-x^4 + 2};$$

$$г) y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3} \text{ и } x + y - 7 = 0.$$

$$29. а) \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\arccos \frac{1}{x} dx}{x\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (5 - \frac{x}{2}) \cos 6x dx;$$

$$в) \int_2^{+\infty} \frac{5x + 7}{x^2 + 5x - 6} dx;$$

$$г) y = 2x^2 + 4x - 5 \text{ и } -4x + y - 3 = 0$$

$$30. а) \int_0^{1/4} \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$б) \int_{-6}^{-1} \frac{x dx}{\sqrt{3-x+1}};$$

$$в) \int_0^{+\infty} \frac{4x - 3}{x^2 + 5} dx;$$

$$г) y = -0,25x^2 - 1,5x - 5,25 \text{ и } x - 2y - 7 = 0.$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 384-438.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№8.1-8.17, №№8.27-8.28, 8.33-8.34.

### Индивидуальная работа № 10.

#### Тема. Числовые ряды

Задания:

Исследовать сходимость ряда (а);

найти область сходимости степенного ряда (б).

Варианты заданий:

$$1. а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2 \sqrt{n+1}};$$

$$б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n 4^n x^n}{n+2 \sqrt{3^n}}.$$

$$2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{3n} \right)^n;$$

$$3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n^2 + 5n - 1}{4n^2 + 5\sqrt{n}}};$$

$$4. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n (n2)^n};$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n3)^n}{4^n};$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n-1};$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}};$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^n)^n};$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{2n+1} \right)^n;$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!};$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{5n-1} \right)^n;$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{5+\ln n}};$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n};$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n-1}{n} \right)^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n-1}}{(n+1)^2}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1} 2^n x^n}{n(n+1)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{n+1}}{(n-1)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1} n x^{n-1}}{2n-1}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1} 2^n n x^n}{2n^2-1}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n x^n}{\sqrt{4n-1} \cdot 3^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n x^{2n}}{3n-1}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{3n-2} \cdot 4^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)^n (n+1)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} x^n}{(n+1)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n n x^{2n-1}}{3n-1}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1} 2^n n x^n}{\sqrt{3n^2-1}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3^n (n+1)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1} 2^{n+1} x^n}{5^n (n^2+1)^n}.$$



$$16. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n-1)!}{n!};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! nx^n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$17. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)!};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{5^n (n-1)!}.$$

$$18. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{3^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n^2 + 1}.$$

$$19. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n3)^n}{4n};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! 4^n x^{2n-1}}{(n+1)!}.$$

$$20. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-2)! (n+1)!};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! 3^n x^{n+1}}{(n+2)! 2^n}.$$

$$21. a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{n+1} \right)^n;$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! (n+1)! x^n}{3^n}.$$

$$22. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3 - 1};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! 4^n x^n}{\sqrt[3]{(n+1)!}}.$$

$$23. a) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{2n};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! 2^n x^n}{(n+1)! 3^n}.$$

$$24. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3n)!};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n-1}.$$

$$25. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n^2} 3^n};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(n-1)!}.$$

$$26. a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+2}{2n+1} \right)^n;$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2 + 1}.$$

$$27. a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^{n^2};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$28. a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+1)!}{n^n};$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)! \sqrt{2^n}}.$$

$$29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \sqrt[3]{\ln^5(n+1)}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1} (n+1)!}.$$

$$30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n+1} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n-1}}{\sqrt{3n-2} (n-1)!}.$$

### Рекомендуемая литература

1. Математика для экономических специальностей вузов. Ч.1 / Под ред. Р.Ш. Марданова.- Казань: Изд-во КГФЭИ, 2001, с. 439-499, 522.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№9.1-9.9, №№9.16-9.17.

### Индивидуальная работа №11.

#### Тема. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Задания:

– найти общее решение дифференциального уравнения (1), построить 4 интегральные кривые; найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию, построить интегральную кривую, соответствующую частному решению (1);

– решить дифференциальные уравнения (2, 3, 4).

Варианты заданий:

1. 1)  $2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2;$

2)  $xdy - (x + y)dx = 0, \quad y(1) = 1;$

3)  $y' + 5y + x = 0;$

4)  $y' + \frac{2xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$

2. 1)  $yy' + 2x = 0, \quad y(1) = 0;$

2)  $xdy - (1 + xe^{y/x})dx = 0, \quad y(1) = 0;$

3)  $y' - \frac{1+2x}{x^2} y = 1;$

4)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{9}{x^2 y^2}.$

3. 1)  $yy' + 1 = 0, \quad y(1) = 2;$

2)  $(y^2 - x^2)dx - xydy = 0, \quad y(1) = \sqrt{2};$

$$3) y' + 2xy = x^3 e^{-x^2};$$

$$4) y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}.$$

$$4. 1) yy' - x = 0, y(0) = 3;$$

$$2) xdy + \left( x \sin^2 \frac{y}{x} - y \right) dx = 0, y \curvearrowright = \frac{\pi}{4};$$

$$3) y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2;$$

$$4) y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \ln x.$$

$$5. 1) x^2 y' + 2 = 0, y(2) = 3;$$

$$2) \left( \frac{y}{x} - x \right) dy + y dx = 0, y \curvearrowright = 1;$$

$$3) y' + y = 2x;$$

$$4) y'x + y = -xy^2.$$

$$6. 1) x + yy' = 0, y(0) = 3;$$

$$2) \left( \frac{y^2}{x} + xy \right) dy - y^2 dx = 0, y \curvearrowright = 2;$$

$$3) y' + 2y = e^{3x};$$

$$4) y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2y}.$$

$$7. 1) xy' - 3y = 0; y(-1) = 2;$$

$$2) x \sin \frac{y}{x} dy - \left( x + y \sin \frac{y}{x} \right) dx = 0, y \curvearrowright = \frac{\pi}{3};$$

$$3) y' - \frac{2y}{2x+1} = 4x^2 - 1;$$

$$4) y' - xy = y^3 \cdot e^{-x^2}.$$

$$8. 1) xy' - 4 = 0; y(1) = 1;$$

$$2) x^2 dy - \left( \frac{y^2}{x} + xy + y^2 \right) dx = 0, y \curvearrowright = 0;$$

$$3) y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = 3 \sin x;$$

$$4) xy' + y = 2y^2 \ln x.$$

$$9. 1) 2yy' + \frac{x}{2} = 0, y(0) = 2;$$

$$2) \left( \frac{y^3}{x} + y^3 \right) dy - x^2 y dx = 0, y \curvearrowright = 1;$$

$$3) y' - y = \frac{1+x^2}{x} \cdot e^x;$$

$$4) y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2}.$$

$$10. 1) y' - y = 0; y(0) = -1;$$

$$2) xdy = \left( y + x \cos^2 \frac{y}{x} \right) dx, y \curvearrowright = \frac{\pi}{4};$$

$$3) xy' + y = e^{3x};$$

$$4) 2xy' + 2y = xy^3.$$

$$11. 1) yy' - 2 = 0, y(2) = 4;$$

$$2) \left( \frac{y^2}{x} - y^3 \right) dy - xy^2 dx = 0, y \curvearrowright = 1;$$

$$3) y' - \frac{y}{x \ln x} = e^x \ln x;$$

$$4) y' + \frac{y}{x} = -xy^2.$$

$$12. 1) xy' + 3 = 0; y(1) = 3;$$

$$2) \left( \frac{y^2}{x} - xy \right) dy + y^2 dx = 0, y \curvearrowright = 4;$$

$$3) y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$$

$$4) y' - \frac{2y}{x} = \frac{5}{x^2 y}.$$

$$13. 1) y' + 2x = 0, \quad y(1) = 2;$$

$$2) xdy - y \ln \frac{y}{x} dx = 0, \quad y \Big|_{x=1} = e^3;$$

$$3) xy' - \frac{y}{x+1} = x;$$

$$4) y' - \frac{4y}{x} = 2x\sqrt{y}.$$

$$14. 1) yy' - 2x = 0, \quad y(2) = 4;$$

$$2) xy^2 dy = (x^3 - y^3) dx, \quad y \Big|_{x=1} = 0;$$

$$3) y' + 2xy = 4xe^{-x^2};$$

$$4) y' - y \cdot \operatorname{tg} x = -y^2 \cdot \cos x.$$

$$15. 1) (x-4)y' - 2y = 0, \quad y(5) = -1; \quad 2) xy' - y = x \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{x}, \quad y \Big|_{x=3} = \frac{\pi}{3};$$

$$3) y' - \frac{y}{x+1} = \ln(x+1);$$

$$4) xy' + 2y = 2x\sqrt{y}.$$

$$16. 1) xy' + y = 0; \quad y(1) = -2;$$

$$2) xdy + \left( xe^{\frac{y}{x}} - y \right) dx = 0, \quad y \Big|_{x=1} = 0;$$

$$3) y' - \frac{2y}{x} = \frac{x-2}{x};$$

$$4) y' + \frac{y}{x} = y^2 \cdot \ln^2 x.$$

$$17. 1) y' - 3x^2 = 0, \quad y(1) = 3;$$

$$2) xdy - \left( y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) dx = 0, \quad y \Big|_{x=3} = \frac{\pi}{3};$$

$$3) 2xy' + y = 2x^3;$$

$$4) y' - \frac{y}{x} = -\frac{x^3}{y}.$$

$$18. 1) (x+3) + (y-4)y' = 0, \quad y(-3)=0; \quad 2) x^2 dy + (x^2 + xy) dx = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$3) y' + \frac{y}{x} = \sin x;$$

$$4) y' + 2xy = e^{2x^2} \cdot y^3.$$

$$19. 1) xy' - 2y = 0, \quad y(2) = 2;$$

$$2) xy^2 dy + (x^3 + y^3) dx = 0, \quad y \Big|_{x=1} = 0;$$

$$3) xy' - y = x^2 \sin x;$$

$$4) y' + \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y^3}.$$

$$20. 1) (x+1)y' - y + 2 = 0, \quad y(2) = 5; \quad 2) xydy + (x^2 - y^2) dx = 0, \quad y \Big|_{x=1} = 1;$$

$$3) xy' + y = x^2 + 3x + 2;$$

$$4) y' + y \operatorname{tg} x = -y^2 \sin^2 x.$$

21. 1)  $2y' - y = 0, \quad y(0) = 1;$       2)  $2xy \, dy - 3(x^2 + y^2) \, dx = 0, \quad y(0) = 2;$   
 3)  $y' + \frac{y}{x} = \cos x;$       4)  $y' + \frac{2y}{x} = x^3 y^2.$
22. 1)  $(y + 4)y' - 1 = 0, \quad y(0) = -2;$       2)  $xdy - \left(xe^{\frac{-y}{x}} + y\right) dx = 0, \quad y(0) = 0;$   
 3)  $y' \sin x - y \cos x = 1;$       4)  $y' + \frac{3}{4x} y = -x^4 y^5.$
23. 1)  $(y + 2)y' + x + 3 = 0, \quad y(1) = 1;$       2)  $xdy - (y + x) \, dx = 0, \quad y(0) = 2;$   
 3)  $y' + 2xy = xe^{x^2};$       4)  $y' + xy = xy^3.$
24. 1)  $xy' - 2 = 0, \quad y(1) = -1;$       2)  $(xy + x^2) \, dy - (x^2 + xy + 2y^2) \, dx = 0, \quad y(0) = 0;$   
 3)  $y' + 2y = e^{-x};$       4)  $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$
25. 1)  $yy' + \frac{x}{4} = 0, \quad y(0) = 4;$       2)  $(y^2 - x^3) \, dy - y^3 \, dx = 0, \quad y(0) = 1;$   
 3)  $y' - \frac{y}{x \ln x} = \frac{2}{x};$       4)  $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{y}.$
26. 1)  $yy' + 2 = 0, \quad y(0) = 2;$       2)  $(y + 2x) \, dy - (x + y) \, dx = 0, \quad y(0) = 0;$   
 3)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 - 3};$       4)  $y' + y \cdot \operatorname{ctgx} = y^2 \sin x.$
27. 1)  $(x - 1) + (y + 2)y' = 0, \quad y(1) = 2;$       2)  $xdy - 2(x + y) \, dx = 0, \quad y(0) = 1;$   
 3)  $y' + \frac{y}{2x+1} = \frac{x}{2x+1};$       4)  $y' + \frac{y}{x} = xy^4.$
28. 1)  $yy' - 4x = 0, \quad y(0) = 2;$       2)  $x^2 \, dy - (x^2 + 2xy) \, dx = 0, \quad y(0) = -2;$   
 3)  $y' + 4xy = 2x;$       4)  $y' - y \operatorname{ctgx} = -y^2 \cos^2 x.$
29. 1)  $(x - 2)y' - y = 0, \quad y(3) = 0,5;$       2)  $x^2 \, dy + (x^2 - xy - y^2) \, dx = 0, \quad y(0) = -6;$   
 3)  $y' + \frac{e^x y}{e^x + 2} = x;$       4)  $y' - xy = xy^3.$

30. 1)  $y' - xy = 0, y(0) = 1;$       2)  $xdy - \left(y + y \ln \frac{y}{x}\right) dx = 0, y \in e;$
- 3)  $y' + \frac{y \cos x}{2 + \sin x} = 3;$       4)  $xy' - y = -2\sqrt{xy}.$

### Рекомендуемая литература

1. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998, с. 388-398.
2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова.- Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№10.1-10.29.

### Индивидуальная работа №12.

#### Тема. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Задание:

Решить дифференциальные уравнения.

Варианты заданий:

1. 1)  $y'' = \frac{24}{x^4}, y'(2)=0, y(2)=1;$       2)  $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2;$
- 3)  $y'' - 22y' + 121y = 0;$       4)  $y'' + y = xe^{2x}.$
2. 1)  $(x^2 + 1)y'' = 4xy, y'(1)=4, y(1)=13/15;$       2)  $y^3 y'' + 1 = 0;$
- 3)  $y'' + y' - 42y = 0;$       4)  $y'' + 4y = 3\cos 2x + 2\sin 2x.$
3. 1)  $y'' - \frac{2xy'}{1+x^2} = -2(1+x^2), y'(1)=2, y(1)=0,5;$       2)  $\frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1+y^2};$
- 3)  $y'' - 10y' + 25y = 0;$       4)  $y'' + 2y' + 17y = x^2 + 1.$
4. 1)  $y'' \operatorname{ctg} 2x + 2y' = 0, y'(\pi)=2, y(\pi)=-1;$       2)  $y'^2 + 2yy'' = 0;$
- 3)  $y'' + 7y = 0;$       4)  $y'' + 2y' + y = xe^{3x}.$

5. 1)  $xy'' - y' = x^4$ ,  $y'(3)=9$ ,  $y(3)=1,2$ ; 2)  $y'' + 2y\sqrt{y'} = 0$ ;  
 3)  $4y'' - 28y' + 65y = 0$ ; 4)  $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ .
6. 1)  $\operatorname{tg} x \cdot y'' = 2y'$ ,  $y'(0,5\pi)=4$ ,  $y(0,5\pi)=0$ ; 2)  $yy'' - \sqrt{y'}^2 + y\sqrt{y'}^3 = 0$ ;  
 3)  $y'' - 11y' + 24y = 0$ ; 4)  $y'' - 7y' + 13y = x + 5$ .
7. 1)  $xy'' = 2y' - \frac{2}{x}$ ,  $y'(1) = -\frac{1}{3}$ ,  $y(1) = \frac{2}{3}$ ; 2)  $3y'y'' = 1$ ;  
 3)  $y'' + 14y' + 49y = 0$ ; 4)  $y'' - 6y' + 34y = 2\sin 3x$ .
8. 1)  $(1 + \sin x)y'' = y' \cos x$ ,  $y'(\pi)=2$ ,  $y(\pi)=2\pi$ ; 2)  $2y^2 + \sqrt{y'}^2 - 2yy'' = 0$ ;  
 3)  $4y'' - 20y' + 29y = 0$ ; 4)  $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$ .
9. 1)  $e^x y'' + \sqrt{y'}^2 = 0$ ,  $y'(0)=1$ ,  $y(0)=3$ ; 2)  $yy'' + \sqrt{y'}^2 = 5$ ;  
 3)  $y'' + 9y = 0$ ; 4)  $y'' + 4y' + 8y = \cos 4x$ .
10. 1)  $xy'' \ln x = y'$ ;  $y'(e)=1$ ,  $y(e)=2$ ; 2)  $yy'' = \sqrt{y'}^2 - \sqrt{y'}^3$ ;  
 3)  $9y'' + 42y' + 50y = 0$ ; 4)  $y'' + 6y' + 9y = x^2 + 2x + 5$ .
11. 1)  $y''(1 + e^{2x}) = 2y'e^{2x}$ ,  $y'(0)=6$ ,  $y(0)=0,5$ ; 2)  $yy'' = \sqrt{y'}^2 - y'$ ;  
 3)  $4y'' + 12y' + 9y = 0$ ; 4)  $y'' + 6y' + 45y = 7e^{5x}$ .
12. 1)  $xy'' + y' + x = 0$ ,  $y'(1)=7/3$ ,  $y(1)=10/9$ ; 2)  $yy'' - \sqrt{y'}^2 = 0$ ;  
 3)  $y'' + 7y' - 8y = 0$ ; 4)  $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ .
13. 1)  $y'' - \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x} = 0$ ,  $y'(1)=1$ ,  $y(1)=4$ ; 2)  $y'y'' = 1$ ;  
 3)  $y'' + 4y' + 20y = 0$ ; 4)  $y'' - 2y' = 2x + 4$ .
14. 1)  $y'' = (2y' - 1)\operatorname{ctg} x$ ,  $y'(0,5\pi)=2$ ,  $y(0,5\pi)=0$ ; 2)  $yy'' = yy' + \sqrt{y'}^2$ ;  
 3)  $16y'' + 24y' + 9y = 0$ ; 4)  $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \cos x$ .
15. 1)  $xy'' + y' = \sqrt{x}$ ,  $y'(1)=0$ ,  $y(1)=1$ ; 2)  $yy'' = 1 + \sqrt{y'}^2$ ;  
 3)  $y'' - 4y' + 29y = 0$ ; 4)  $y'' + 5y' - 14y = \cos 7x$ .

16. 1)  $x^5 y'' + x^4 y' = 3$ ,  $y'(1)=3$ ,  $y(1)=2,5$ ; 2)  $2yy'' = -y'^2$ ;  
 3)  $2y'' + 9y' - 35y = 0$ ; 4)  $y'' - 14y' + 49y = (2x+1)e^{-x}$
17. 1)  $y'' - \frac{2}{x}y' = x$ ,  $y'(1)=2$ ,  $y(1)=4/9$ ; 2)  $y'' = yy'$ ;  
 3)  $4y'' + 4y' + 10y = 0$ ; 4)  $y'' + 3y' = 3xe^{7x}$ .
18. 1)  $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ ,  $y'(2)=15$ ,  $y(2)=8$ ; 2)  $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$ ;  
 3)  $16y'' - 72y' + 81y = 0$ ; 4)  $y'' + 7y' + 10y = x^2 + 3x + 2$
19. 1)  $xy'' + y' = x + 1$ ,  $y'(2)=1$ ,  $y(2)=3$ ; 2)  $y'' = y'^4$ ;  
 3)  $2y'' - 13y' + 15y = 0$ ; 4)  $y'' + 12y' + 36y = 4\cos 3x$ .
20. 1)  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ ;  $y'(0,5\pi)=1$ ,  $y(0,5\pi)=\pi$ ; 2)  $y'' = y'^2$ ;  
 3)  $4y'' + 44y' + 157y = 0$ ; 4)  $y'' + 4y' - 5y = 9e^x$ .
21. 1)  $y'' \operatorname{tg} x - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$ ,  $y'(0,5\pi)=2$ ,  $y(0,5\pi)=5$ ; 2)  $yy'' = y'^3$ ;  
 3)  $y'' + 2y' - 15y = 0$ ; 4)  $y'' + 8y' + 16y = 3x^2 + 4x$ .
22. 1)  $(1-x^2)y'' + xy' - 2\sqrt{1-x^2}$ ,  $y'(0)=3$ ,  $y(0)=2$ ; 2)  $y'' = 2yy'$ ;  
 3)  $y'' - 6y' + 58y = 0$ ; 4)  $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x}$ .
23. 1)  $y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$ ,  $y'(0,25\pi)=1$ ,  $y(0,25\pi)=2$ ; 2)  $yy'' - (y')^2 = y^3$ ;  
 3)  $y'' - 14y' + 45y = 0$ ; 4)  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin x$ .
24. 1)  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $y'(\pi)=4$ ,  $y(\pi)=2$ ; 2)  $y'' = y'(y+1)$ ;  
 3)  $4y'' - 20y' + 25y = 0$ ; 4)  $y'' - 10y' + 29y = 2x^2 + x$ .
25. 1)  $y'' + y' = x$ ,  $y'(0)=1$ ,  $y(0)=2$ ; 2)  $y'' = (y')^2 \operatorname{tg} y$ ;  
 3)  $2y'' + 13y' + 18y = 0$ ; 4)  $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$ .
26. 1)  $(x^2 + 1)y'' = 2x(y' - 2)$ ,  $y'(0)=4$ ,  $y(0)=3$ ; 2)  $y y'' + (y')^2 = y y'$ ;  
 3)  $y'' + 4y' = 0$ ; 4)  $y'' - 4y' + 13y = 3x$ .



27. 1)  $(x-3)y'' = y' + 1$ ,  $y'(2) = -2$ ,  $y(2) = 0$ ;

3)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ;

28. 1)  $y'' - \frac{1}{x}y' = x^2$ ,  $y'(2) = 2$ ,  $y(2) = 5$ ;

3)  $y'' + y' + 17y = 0$ ;

29. 1)  $x^2 y'' = y'^2$ ,  $y'(1) = 0,5$ ,  $y(1) = 0$ ;

3)  $y'' + 9y' + 18y = 0$ ;

30. 1)  $x^4 y'' + x^3 y' = 1$ ,  $y'(1) = 0,5$ ,  $y(1) = 0,25$ ;

3)  $49y'' + 14y' + y = 0$ ;

2)  $(2+y)y'' - (y')^2 = 0$ ;

4)  $y'' + 16y = 2\cos 4x$ .

2)  $y'' = (y')^2 \operatorname{ctgy}$ ;

4)  $y'' - 2y' = x - 4$ .

2)  $y'' - \frac{(y')^2}{e-1} = 0$ ;

4)  $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ .

2)  $y'y'' = 1$ ;

4)  $y'' - 2y' + 10y = (2x+3)e^x$ .

*Рекомендуемая литература*

1. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998, с. 398-409.

2. Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов./ Р. Ш. Марданов, А. Ю. Хасанова, Р. А. Султанов, А. Г. Фатыхов; под научной редакцией проф. Р. Ш. Марданова. – Казань: Казан. Гос. Ун.-т, 2009, №№ 10.34-10.45.